E P F

CONCOURS D'ENTRÉE du 25 MAI 1991

ÉPREUVE de MATHEMATIQUES

3 bis rue Lakanal
92330 SCEAUX
(1) 46 60 33 31

Durée 4 heures - COEFFICIENT 5

Sur les 4 exercices proposés, 2 seulement sont à traiter au choix de la candidate.
Attention : sans indication de votre part, seuls les 2 premiers exercices traités seront corrigés
Dans l'application du barème, on tiendra compte de la clarté et de la précision des figures, et de la qualité des explications. La candidate devra donner les énoncés complets des théorèmes qu'elle sera amenée à utiliser.

Exercice 1

Dans un plan P, on considère trois points A, B, C tels que :

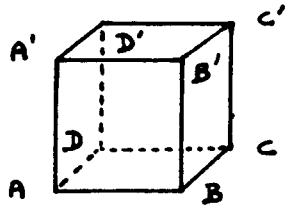
AB = 4 cm AC = 6 cm

l'angle en A du triangle ABC a pour mesure $\frac{\pi}{3}$

Sur la droite orthogonale en A au plan P, un point S est tel que AS = 4 cm.
Dessiner le patron du tétraèdre SABC (grandeur réelle) et calculer la surface totale des faces du tétraèdre.

Exercice 2

On considère un cube ABCDA'B'C'D' d'arête 8 cm.



Sur le segment [AA'] on considère le point E tel que A'E = 2 cm
Sur le segment [BB'] on considère le point F tel que BF = 3 cm
Sur le segment [DD'] on considère le point G tel que DG = 2 cm

1) Déterminer l'intersection du plan P, contenant les points E, F et G, avec les arêtes du cube. Préciser la position des points d'intersection.
2) Montrer que l'intersection est un pentagone qu'on dessinera en vraie grandeur.

Exercice 3

On considère un tétraèdre régulier ABCD de 10 cm de côté, I le milieu du segment [BC], G l'isobarycentre des points A, B, C, D.

a) A partir du segment [AD] de 10 cm, construire au moyen de la règle et du compas le triangle IAD en vraie grandeur (indiquer brièvement la démarche).

Montrer que G est situé dans le triangle IAD ; placer G.

b) La droite (IG) rencontre (AD) en J, (AG) rencontre (ID) en H, (JH) rencontre (IA) en P, (JH) rencontre (DG) en Q.

Calculer les longueurs des segments [JH], [JP] et [JQ].

Exercice 4

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{1-x^2}$. Etudier les variations de f. Représenter graphiquement f par la courbe C(f) dans un repère orthonormal $R(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C(f), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective x = 0 et x = 1.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = |2x^2 - 1|\, e^{1-x^2}$$

La notation $|2x^2 - 1|$ signifie valeur absolue de $2x^2 - 1$

g est-elle une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$? Représenter graphiquement g par la courbe C(g) dans un repère orthonormal $R'(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ (unité : 2 cm).

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C(g), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective x = 0 et x = 1.

TSVP

ECOLE POLYTECHNIQUE FEMININE:

PROBLEME

Partie A

1° Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x$.

Etudier les variations de la fonction φ. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2° On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln x}{x}$$

a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$, et les variations de f.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).

Calculer des valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près. (Indiquer la méthode utilisée et donner les détails du calcul).

3° a) Démontrer que la courbe représentative C de f a deux asymptotes, dont l'une Δ est une asymptote non parallèle aux axes de coordonnées.

Préciser la position de C par rapport à Δ.

b) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm sur chaque axe), tracer la courbe C, la droite Δ et les tangentes remarquables.

4° Calculer l'aire S de la partie du plan comprise entre C et l'axe des abscisses. Donner d'abord la valeur exacte de S en fonction de α et β, puis la valeur approchée en cm^2 à 10^{-2} près.

Partie B

1° Démontrer qu'il existe une unique tangente T à C passant par O.
On appelle a l'abscisse du point de C en lequel T est tangente.
Déterminer une valeur approchée de a à 10^{-2} près et calculer le coefficient directeur de T en fonction de a.

2° Indiquer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel t, le nombre de points d'intersection de la courbe C avec une droite passant par O de coefficient directeur t.

3° On veut déterminer par le calcul le nombre de points d'intersection de C avec la droite D_t d'équation $y = tx$.

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de C avec D_t sont solutions de l'équation : $x^2(1 - t) - 2x - 2 - 3 \ln x = 0$

Dans la suite, on désigne par $h_t(x)$ le premier membre de cette équation.

b) Démontrer que si $t \in [1 ; +\infty[$, la fonction h_t est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que C et D_t ont alors un unique point d'intersection.

c) Si $t \in]-\infty , 1[$, montrer que h_t a un minimum. Etudier le signe de ce minimum pour en déduire le nombre de points d'intersection de C et D_t, et retrouver le coefficient directeur de T en fonction de a.

Partie C

On se place dans l'espace et on prend un troisième axe de coordonnées passant par O et orthogonal au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On obtient alors un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La portion de la courbe C correspondant aux valeurs de x vérifiant $\alpha < x < \beta$ tourne autour de l'axe des abscisses, et engendre une surface qui délimite un volume.

On rappelle que $V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\, dx$ où S(x) est l'aire de la portion du plan parallèle à $(O; \vec{j}, \vec{k})$ d'abscisse x intérieure à la surface.

Calculer V en fonction de α et β, puis en donner une valeur approchée en cm^3 à 10^{-3} près.

FIN